รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัย : ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมน
แบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน

ผู้วิจัย : นายสุธน ตาดี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ได้รับทุนอุดหนุนจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
ประจำปีงบประมาณ 2559

รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการวิจัย : ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมน
แบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน

ผู้วิจัย : นายสุธน ตาดี
วท.ม. (คณิตศาสตร์)

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ได้รับทุนอุดหนุนจากมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
ประจำปีงบประมาณ 2559

ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมนแบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน

Complete residue systems in three complex quadratic Euclidean domains

Santad Damkaew[1], Vichian Laohakosol[2] and Suton Tadee[3]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science,
Prince of Songkla University, Songkhla 90110, Thailand
E-mail: s.damkaew@hotmail.com
[2]Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand
E-mail: fscivil@ku.ac.th
[3]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000, Thailand
E-mail: s.tadee@hotmail.com

Abstract

In 1978, G.E. Bergum discovered three explicit representations for complete residue systems in the Euclidean domain $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-3}\right)/2\right)$ extending two similar earlier results for the Euclidean domains $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-1}\right)$ and $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-2}\right)$. Among these three representations, the first is simplest to derive, while the third has a minimal property in the sense that the sum of their absolute values is minimal. Here, we derive analogous representations for complete residue systems in the remaining imaginary quadratic fields which are Euclidean domains, namely, $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-7}\right)/2\right)$ and $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-11}\right)/2\right)$. The first representation consists of lattice points in a rectangle in the first quadrant of the complex field. The second representation consists of lattice points in a parallelogram. The third representation consists of lattice points in a hexagon which enjoy a minimality condition.

Key words and phrase: Complete residue systems, representations of complete residue systems

คำนำ

โครงการวิจัย เรื่อง ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมนแบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน จัดทำขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์ 3 ประการ ประการแรก การศึกษาลักษณะและสมบัติของสมาชิกของโดเมนแบบยูคลิดและระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ประการที่สอง การวิเคราะห์ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของ $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-3}\right)/2\right)$ และประการที่สาม หาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของ $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-7}\right)/2\right)$ และ $\mathbb{Z}\left(\left(-1+\sqrt{-11}\right)/2\right)$ โดยผลการวิจัยในครั้งนี้เป็นการสร้างองค์ความรู้ใหม่ทางด้านวิชาทฤษฎีจำนวน ซึ่งถือได้ว่าเป็นสาขาวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้องค์ความรู้ที่ได้รับยังมีส่วนช่วยพัฒนาความรู้และหลักการคิดค้นทฤษฎีบทพร้อมการพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผลและรัดกุม เพื่อเป็นพื้นฐานในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าการวิจัยในครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อ ครู อาจารย์ นักเรียน นักศึกษาหรือผู้ที่เกี่ยวข้องทั้งหลายและ หากเกิดข้อพกพร่อง ผู้วิจัยพร้อมที่จะรับข้อเสนอแนะ เพื่อที่จะนำมาปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาเพื่อเกิดประโยชน์สูงสุดต่อการศึกษาของประเทศไทยต่อไป

สุธน ตาดี

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัย เรื่อง ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมนแบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน สำเร็จลงด้วยดี เพราะได้รับความกรุณาจากหลายฝ่าย ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรีที่ให้ทุนอุดหนุนงานวิจัยในครั้งนี้

ขอขอบคุณ ศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่ง ผู้วิจัยยึดถือเป็นแบบอย่างตลอดมา และขอขอบคุณ ผศ.ดร.ฐาปกรณ์ แก้วเงิน คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี ที่ได้ให้การสนับสนุนการดำเนินงานโครงการวิจัย ผู้วิจัยขอขอบคุณทุกท่านที่กล่าวมา ณ โอกาสนี้อีกครั้งหนึ่ง

สุธน ตาดี

สารบัญ

รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์
ทุนอุดหนุนการวิจัยปีงบประมาณ พ.ศ. 2559
มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

---

1. ชื่อโครงการ

(ภาษาไทย) ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในสามโดเมนแบบยูคลิดกำลังสองเชิงซ้อน

(ภาษาอังกฤษ) Complete residue systems in three complex quadratic Euclidean domains

2. ประเภทงานวิจัย

- ☑ การวิจัยพื้นฐาน (Basic research)
- ☐ การวิจัยประยุกต์ (Applied research)
- ☐ การพัฒนาทดลอง (Experimental development)

3. สาขาวิชาที่ทำการวิจัย

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์กายภาพและคณิตศาสตร์ กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ

4. คำสำคัญ (keywords) ของการวิจัย

ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Complete residue systems), การเป็นตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Representations of complete residue systems)

5. คณะผู้วิจัย

5.1 หัวหน้าโครงการวิจัย

ชื่อ – นามสกุล	นายสุธน ตาดี
ตำแหน่ง	อาจารย์
หน่วยงานที่สังกัด	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
หมายเลขโทรศัพท์	081-9040975
E-mail	s.tadee@hotmail.com

5.2 ที่ปรึกษาโครงการวิจัย

ชื่อ - นามสกุล	ดร.วิเชียร เลาหโกศล
ตำแหน่ง	ศาสตราจารย์
หน่วยงานที่สังกัด	ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
หมายเลขโทรศัพท์	081-4779192
E-mail	fscivil@ku.ac.th

5.3 ผู้ร่วมวิจัย

ชื่อ - นามสกุล	นายสันทัด แดงแก้ว
ตำแหน่ง	นักศึกษา
หน่วยงานที่สังกัด	ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
หมายเลขโทรศัพท์	086-6925319
E-mail	s.damkaew@hotmail.co.th

6. ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย

ก่อนที่จะเข้าสู่ความสำคัญและที่มาของปัญหาในการวิจัย ขอนำเสนอบทนิยามที่มีความสำคัญในการดำเนินงานวิจัย [7, หน้า 639 - 690] ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะกล่าวว่า a สมภาค หรือ คอนกรูเอนซ์ (Congruence) กับ b มอดุโล n เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{n}$ ก็ต่อเมื่อ n หาร $a-b$ ลงตัว

บทนิยาม 6.2 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะเรียก b ว่า เป็น ส่วนตกค้าง (Residue) ของ a มอดุโล n ถ้า $a \equiv b \pmod{n}$

เราจะเรียกเซตของจำนวนเต็ม $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ ว่าเป็น ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Complete residue system) มอดุโล n ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ จำนวนเต็ม a จะมี $a_i \in \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ เพียงตัวเดียว ซึ่งทำให้

$$a \equiv a_i \pmod{n}$$

และเรียกเซต $\{a \in \mathbb{Z} : a \equiv a_i \pmod{n}\}$ ว่าชั้นส่วนตกค้าง (Residue class) ของ a_i มอดุโล n

หมายเหตุ ให้ x, q, r เป็นจำนวนเต็ม, n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x = nq + r$ ดังนั้น $x \equiv r \pmod{n}$ จะได้ว่า r เป็นส่วนตกค้าง (Residue) ของ x มอดุโล n และถ้า $0 \le r < n$ เราจะเรียก r ว่าเป็นส่วนตกค้างที่ไม่เป็นลบค่าน้อยสุด (Least non-negative residue) ของ x มอดุโล n เพราะฉะนั้น เซต $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ เรียกว่า ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ที่ไม่เป็นลบค่าน้อยสุด (Least non-negative residue system) มอดุโล n นั่นคือ จะมี $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่เป็นส่วนตกค้างของ x มอดุโล n

บทนิยาม 6.3 เราจะเรียกจำนวนเชิงซ้อน α ว่า จำนวนเชิงพีชคณิต (Algebraic number) ถ้า α เป็นรากของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม หรือ มีจำนวนเต็ม $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ซึ่งทำให้

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

ถ้า α ไม่เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต เราจะเรียก α ว่าจำนวนอดิศัย (Transcendental number)

บทนิยาม 6.4 เราจะเรียกจำนวนเชิงพีชคณิต α ว่าเป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต (Algebraic integer number) ถ้าสัมประสิทธิ์นำของสมการในบทนิยาม 6.3 เท่ากับ 1 หรือ $a_n = 1$

บทนิยาม 6.5 เราจะกล่าวว่าจำนวนเชิงพีชคณิต α มีดีกรี (Degree) n ถ้า α เป็นรากของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรี n และไม่เป็นรากของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรีต่ำกว่า n และเรียกพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรี n ว่า Minimal polynomial ของ α

สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{Z}[x]$ แทนเซตของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

$\deg f$ แทนดีกรี (Degree) ของพหุนาม $f(x)$

บทนิยาม 6.6 ให้ $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ โดยที่ $f(x) \neq 0$ เราจะกล่าวว่า $f(x)$ หาร $g(x)$ ลงตัว ถ้ามี $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ซึ่งทำให้ $g(x) = f(x)q(x)$ และเรียก $f(x)$ ว่าตัวประกอบ (Factor) ของ $g(x)$ เขียนแทนด้วย $f(x) \mid g(x)$

บทนิยาม 6.7 สับฟีลด์ (Subfield) ของฟีลด์จำนวนเชิงพีชคณิต เราเรียกว่า ฟีลด์ของจำนวนเชิงพีชคณิต (Algebraic number field)

ให้ α เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต จะได้ว่า เซตของจำนวนที่อยู่ในรูป $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ โดยที่ $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ และ $g(\alpha) \neq 0$ เป็นฟีลด์ เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}(\alpha)$ เรียกว่า ส่วนขยาย (Extension) ของ $\mathbb{Z}$ ที่เกี่ยวเนื่องกับ α (by a formed by adjoining α to $\mathbb{Z}$)

บทนิยาม 6.8 ให้ α เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต และ $f(x)$ เป็น Minimal polynomial โดยที่ $\deg f = n$ ถ้า $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ เป็นรากทั้งหมดที่แตกต่างกันของ $f(x)$ แล้ว $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต เราจะเรียก $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ ว่า สังยุค (Conjugate) ของ α

ถ้า $\xi \in \mathbb{Z}(\alpha)$ และ $\xi = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ แล้ว

$$\xi_i = a_0 + a_1\alpha_i + a_2\alpha_i^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha_i^{n-1} \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

เราจะเรียก ξ_i ว่า Field conjugates ของ ξ

บทนิยาม 6.9 ให้ ξ เป็นจำนวนเชิงพีชคณิตใน $\mathbb{Z}(\alpha)$ ที่มีดีกรี n และให้ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ เป็น Field conjugates ของ ξ เราจะเรียกผลคูณ $\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1}$ ว่า Norm ของ ξ บน $\mathbb{Z}(\alpha)$ เขียนแทนด้วย $N(\xi)$

บทนิยาม 6.10 เราจะเรียก ริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\alpha)$ ว่า Norm-Euclidean หรือ Euclidean domain ถ้า สำหรับทุก ξ_1 และ ξ_2 ที่เป็นสมาชิกในริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\alpha)$ โดยที่ $\xi_2 \neq 0$ แล้วมี λ และ ρ ที่เป็นสมาชิกในริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\alpha)$ ซึ่งทำให้ $\xi_1 = \xi_2\lambda + \rho$ โดยที่ $|N(\rho)| < |N(\xi_2)|$

จากบทนิยามข้างต้นเราสามารถนิยามการหารลงตัว (Divisibility) และสมภาค (Congruence) ในโดเมนแบบยุคลิด (Euclidean domain) ได้ดังนี้

ให้ α, δ และ γ เป็นสมาชิกของโดเมนแบบยูคลิก โดยที่ $\gamma \neq 0$ เราจะเรียกว่า

1. $\gamma | \alpha$ ก็ต่อเมื่อ มี β เป็นสมาชิกในโดเมนแบบยูคลิก ซึ่งทำให้ $\alpha = \gamma\beta$
2. $\alpha \equiv \delta (\operatorname{mod} \gamma)$ ก็ต่อเมื่อ $\gamma | (\alpha - \delta)$

บทนิยาม 6.11 ถ้า $m > 0$ เราจะเรียก $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ ว่า Real quadratic field และถ้า $m < 0$ เราจะเรียก $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ ว่า Complex quadratic field

สำหรับงานวิจัยนี้ เราจะสนใจระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในโดเมนแบบยูคลิกกำลังสองเชิงซ้อน (Complex quadratic Euclidean domains) ในอดีตนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและค้นพบว่า ริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ เป็น Complex quadratic Euclidean domains ก็ต่อเมื่อ $m = -1, -2, -3, -7, -11$ เท่านั้น และต่อมาได้มีผู้ศึกษาเกี่ยวกับเรื่องนี้ และได้ค้นพบระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ สำหรับ $m = -1, -2, -3$ แต่ยังไม่มีผู้ใดหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ สำหรับ $m = -7, -11$ ดังนั้นในงานวิจัยนี้เราจะหาระบบดังกล่าว โดยจะหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในโดเมนแบบยูคลิกกำลังสองเชิงซ้อนตามแนวทางของ Bergum [1, หน้า 75 - 86] ที่หาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ สำหรับ $m = -3$ ดังนั้น เราจะแสดงวิธีการหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ สำหรับ $m = -3, -7, -11$ ไปพร้อมกัน

ข้อตกลง เราทราบว่า $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}$ เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต (Algebraic integer) เมื่อ $m=-3,-7,-11$

กำหนดสัญลักษณ์ $\sigma_m=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}$ เมื่อ $m=-3,-7,-11$

ให้ $\mathbb{Z}(\sigma_m)=\{a+b\sigma_m : a,b\in\mathbb{Z}\}$ และ $\gamma=a+b\sigma_m$

จะได้ว่า ขนาด (Norm) ของ γ (เขียนแทนด้วย $|\gamma|^2$)

$$|\gamma|^2=a^2-ab+\left(\frac{1-m}{4}\right)b^2$$

7. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

7.1 ศึกษาลักษณะและสมบัติของสมาชิกของโดเมนแบบยุคลิกและระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์

7.2 วิเคราะห์ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของ $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$

7.3 หาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ของ $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ และ $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$

8. ขอบเขตของการวิจัย

ศึกษาเฉพาะระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์สำหรับสามโดเมนแบบยุคลิกกำลังสองเชิงซ้อน

9. ทฤษฎี สมมติฐาน (ถ้ามี) และกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับโครงการวิจัย [7, หน้า 639 - 690]:

ทฤษฎีบท 9.1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The division algorithm)

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $a\neq 0$ จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวเท่านั้น ซึ่งทำให้

$$b=aq+r \text{ โดยที่ } 0\le r<|a|$$

จะเรียก q ว่า ผลหาร (Quotient) และ r ว่า เศษ (Remainder)

ทฤษฎีบท 9.2 จากบทนิยามข้างต้นจะได้ว่า

1. $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ และ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ต่างเป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ มอดุโล n

2. ถ้า $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n และ c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\{a_1+c,a_2+c,a_3+c,\ldots,a_n+c\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n

3. ให้ $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $a_i,a_j\in\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ ถ้า $a_i\equiv a_j \pmod{n}$ แล้ว $a_i=a_j$

4. ถ้า $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ และ $\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n แล้ว สำหรับทุกๆ $a_i\in\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ จะมี $b_j\in\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n\}$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งทำให้ $a_i\equiv b_j \pmod{n}$

5. ถ้า $\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n และ c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ c และ n เท่ากับ 1 แล้ว $\{ca_1,ca_2,ca_3,\ldots,ca_n\}$ เป็นระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n

ทฤษฎีบท 9.3

1. ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว r เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต
2. ถ้า a, b, c และ m เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $c \neq 0$ แล้ว $\dfrac{a+b\sqrt{m}}{c}$ เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต

ทฤษฎีบท 9.4

1. ถ้า α และ β เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต แล้ว $\alpha+\beta$ และ $\alpha\beta$ เป็นจำนวนพีชคณิต
2. ถ้า α และ β เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต แล้ว $\alpha+\beta$ และ $\alpha\beta$ เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต

ทฤษฎีบท 9.5 เซตของจำนวนเชิงพีชคณิตเป็นฟีลด์ (Field) และเซตของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตเป็นริง (Ring)

ทฤษฎีบท 9.6

1. ถ้า ξ เป็นจำนวนเชิงพีชคณิต แล้ว $N(\xi)$ เป็นจำนวนตรรกยะ
2. ถ้า ξ เป็นจำนวนเต็มเชิงพีชคณิต แล้ว $N(\xi)$ เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 9.7 ให้ ξ_1 และ ξ_2 เป็นจำนวนเชิงพีชคณิตใน $\mathbb{Z}(\alpha)$ จะได้ว่า

1. $N(\xi_1\xi_2) = N(\xi_1)N(\xi_2)$
2. $N(\xi_1) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\xi_1 = 0$
3. ถ้า $\xi_2 \neq 0$ แล้ว $N\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right) = \dfrac{N(\xi_1)}{N(\xi_2)}$

ทฤษฎีบท 9.8 ทุกริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\alpha)$ ที่เป็น Euclidean domain จะเป็น unique factorization domain (UFD) ด้วย

ทฤษฎีบท 9.9 ริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ เป็น Complex quadratic Euclidean domains ก็ต่อเมื่อ $m = -1, -2, -3, -7, -11$

บทแทรก 9.10 ถ้า $m = -1, -2, -3, -7, -11$ แล้ว ริงของจำนวนเต็มเชิงพีชคณิตที่อยู่ในฟีลด์ $\mathbb{Z}(\sqrt{m})$ เป็น Unique factorization domain (UFD)

สมมุติฐานของโครงการวิจัย: การหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ และ $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ เราสามารถใช้แนวทางในการพิสูจน์ของ Bergum [1, หน้า 75 - 86] มาขยายผลเพื่อหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ และ $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$

กรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย: เราจะค้นคว้าและศึกษาสมบัติและทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเชิงพีชคณิต (Algebraic number) ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ (Complete residue systems) และโดเมนแบบยุคลิดกำลังสองเชิงซ้อน (Complex quadratic Euclidean domains) พร้อมกับศึกษาการพิสูจน์ของ Bergum [1, หน้า 75 - 86] อย่างละเอียด จากนั้นนำความรู้ที่ได้มาบูรณาการเข้าด้วยกัน วิเคราะห์และสังเคราะห์หาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ตามที่ได้ตั้งสมมุติฐานไว้

10. การทบทวนวรรณกรรม/สารสนเทศ (information) ที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1939 Uspensky และ Heaslet [8] ได้พบหลายตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ และสองระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล n ที่เป็นที่รู้จักเป็นอย่างดี คือ เซตของจำนวนเต็ม $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ และเซตของจำนวนเต็ม $\left\{x \in \mathbb{Z} : -\frac{n}{2} < x \leq \frac{n}{2}\right\}$

ในปี ค.ศ. 1965 Jordan และ Potratz [3, หน้า 1 - 12] ได้ตีพิมพ์ผลงานเกี่ยวกับหลายตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ในจำนวนเต็มของเกาส์ $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-1}\right) = \left\{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 1966 Potratz [6] ได้ขยายงานวิจัยและค้นพบหลายตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ในโดเมนแบบยูคลิกกำลังสอง (Quadratic Euclidean domain) ของ $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-2}\right) = \left\{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

ในปี ค.ศ. 1978 Bergum [1, หน้า 75 - 86] ได้พบตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$ มี 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1. ให้ $\gamma = a + b\sqrt{-3}$, $d = (a, b)$ และ $\gamma = d\left(a_1 + b_1\sqrt{-3}\right) = d\mu$

ทฤษฎีบท 10.1 ถ้า d เป็นจำนวนเต็มคู่

$$\mathrm{T}_1 = \left\{x + y\sqrt{-3} : 0 \leq x \leq d|\mu|^2 - 1, 0 \leq y \leq \frac{d-2}{2}\right\}$$

และ

$$\mathrm{T}_2 = \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\sqrt{-3} : 0 \leq x \leq d|\mu|^2 - 1, 0 \leq y \leq \frac{d-2}{2}\right\}$$

แล้ว $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ เป็นตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ

ทฤษฎีบท 10.2 ถ้า d เป็นจำนวนเต็มคี่

$$\mathrm{T}_1 = \left\{x + y\sqrt{-3} : 0 \leq x \leq d|\mu|^2 - 1, 0 \leq y \leq \frac{d-1}{2}\right\}$$

และ

$$\mathrm{T}_2 = \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\sqrt{-3} : 0 \leq x \leq d|\mu|^2 - 1, 0 \leq y \leq \frac{d-3}{2}\right\}$$

แล้ว $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ เป็นตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ

บทแทรก 10.3 จำนวนเชิงการนับ (Cardinality) ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ เท่ากับ $|\gamma|^2$

แบบที่ 2. ให้ $\gamma = a + b\sqrt{-3}$ และ

T_1 เป็นเซตที่รวบรวมจุดในรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Rhombus) ABCD โดยมีจุดยอด (Vertices) คือ

$$\frac{\left(1+\sqrt{-3}\right)\gamma}{2}, \frac{\left(1-\sqrt{-3}\right)\gamma}{2}, \frac{\left(-1-\sqrt{-3}\right)\gamma}{2} \text{ และ } \frac{\left(-1+\sqrt{-3}\right)\gamma}{2}$$

และให้ T_2 เป็นเซตที่รวบรวมจุดบน The half-open line segments $\left(\frac{\pm\left(-1+\sqrt{-3}\right)\gamma}{2}, \frac{\left(-1-\sqrt{-3}\right)\gamma}{2}\right)$

ทฤษฎีบท 10.4 ให้ $T = T_1 \cup T_2$ จะได้ว่า T เป็นตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ

ทฤษฎีบท 10.5 ถ้า $\gamma = a + b\sqrt{-3}$ จะได้ว่า 2 หาร $|\gamma|^2$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ 2 หาร γ ลงตัว

ทฤษฎีบท 10.6 ให้ $\gamma = a + b\sqrt{-3}$ และ $T = T_1 \cup T_2$ จะได้ว่า เซต T_2 ไม่ว่าง ก็ต่อเมื่อ 2 หาร γ ไม่ลงตัว

แบบที่ 3. เราจะเรียกตัวแทน T ของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ เรียกว่า Absolute minimal representation ก็ต่อเมื่อ สำหรับตัวแทน R ใดๆ ของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ ซึ่งทำให้

$$\sum_{\alpha\in T}|\alpha| \le \sum_{\beta\in R}|\beta|$$

ให้ T_1 เป็นเซตของจุดภายใน (Points interior) the hexagon ABCDEF โดยที่ vertices คือ

$$\frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)e^{\pi k i/3}}{3} \quad \text{เมื่อ } 1 \le k \le 6$$

ให้ T_2 เป็นเซตของจุดบน The line segments

$$\left[-\frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)}{3}, \frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)e^{4\pi i/3}}{3}\right], \left[\frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)e^{4\pi i/3}}{3}, \frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)e^{5\pi i/3}}{3}\right]$$

และ

$$\left[\frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)e^{5\pi i/3}}{3}, \frac{\gamma\left(1-\sqrt{-3}\right)}{3}\right)$$

ทฤษฎีบท 10.7 $T = T_1 \cup T_2$ เป็นตัวแทนของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์มอดุโล γ

บทตั้ง 10.8 ถ้า $-1 \le a < 1$ หรือ $-1 < a \le 1$ และ r เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว $0 \le r^2 + ar$

บทตั้ง 10.9 ถ้า $\alpha \in T$ แล้ว $|\alpha| \le |\beta|$ สำหรับทุก $\beta \equiv \alpha \pmod{\gamma}$

11. เอกสารอ้างอิงของโครงการวิจัย

[1] Bergum, G. E. Complete residue systems in the quadratic domain $\mathbb{Z}\left(e^{2\pi i/3}\right)$, Internat. J. Math" & Math. Sci. 1(1978), pp. 75 - 86.

[2] Hardman, N. R. and J. H. Jordan. A minimum problem connected with complete residue systems in the Gaussian integer, Amer. Math. Monthly 74(1967), pp. 559 - 561.

[3] Jordan, J. H. and C. J. Potratz. Complete residue systems in the Gaussian integer, Math. Mag. 38(1965), pp. 1 - 12.

[4] Hardy, G. H. and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 4th edition, Oxford University Press, London, 1971.

[5] Niven, I., H.S. Zuckerman and H.L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed., John Wiley and Sons, New York, 1991.

[6] Potratz, C. J. Character sums in $\mathbb{Z}\left(\sqrt{2}\right)/(p)$. Unpublished Ph.D. dissertation, Washington State University, 1966.

[7] Redmond, D. Number theory : an introduction , Marcel Dekker. New York. 1996.

[8] Uspensky, J. V. and M. A. Heaslet. Elementary number theory, McGraw-Hill, New York, 1939.

12. วิธีการดำเนินการวิจัย และสถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล

12.1 วิธีการดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์แบบยูคลิกกำลังสองเชิงซ้อน
2. เข้าร่วมประชุมสัมมนาเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนและการประยุกต์เพื่อให้ได้ข้อมูล แนวคิดใหม่ๆ และได้แลกเปลี่ยนความรู้กับผู้เชี่ยวชาญในสาขานี้
3. วิเคราะห์ระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$
4. ค้นหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ และ $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$
5. สรุปผลการศึกษาวิจัย
6. นำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการทางด้านคณิตศาสตร์หรือเผยแพร่ผลงานวิจัยทางเว็บไซต์ของมหาวิทยาลัย

12.2 สถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล

1. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี
2. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

13. ระยะเวลาทำการวิจัยและแผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย

การดำเนินงานวิจัย	ระยะเวลา											
	ต.ค. 58	พ.ย. 58	ธ.ค. 58	ม.ค. 59	ก.พ. 59	มี.ค. 59	เม.ย. 59	พ.ค. 59	มิ.ย. 59	ก.ค. 59	ส.ค. 59	ก.ย. 59
1. ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์แบบยูคลิกกำลังสองเชิงซ้อน	↔	↔	↔	↔								
2. เข้าร่วมประชุมเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนและการประยุกต์เพื่อให้ได้ข้อมูล แนวคิดใหม่ๆ และได้แลกเปลี่ยนความรู้กับผู้เชี่ยวชาญในสาขานี้					↔							
3. วิเคราะห์ของระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์ใน $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$						↔	↔	↔				
4. ค้นหาระบบส่วนตกค้างบริบูรณ์สำหรับ $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ และ $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$								↔	↔			
5. สรุปผลการศึกษาวิจัย										↔	↔	
6. นำเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการทางด้านคณิตศาสตร์ หรือเผยแพร่ผลงานวิจัยทางเว็ปไซต์ของมหาวิทยาลัย												↔

14. ผลการวิจัย

รายละเอียดในภาคผนวก

15. ประโยชน์ที่ได้รับ

15.1 ได้ผลงานวิจัยเพื่อพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี

15.2 ได้ทฤษฎีบทที่สามารถเป็นพื้นฐานการศึกษาค้นคว้าวิจัยของนักศึกษาและผู้สนใจ

15.3 ได้เผยแพร่งานวิจัยในงานประชุมวิชาการหรือประชาสัมพันธ์ผ่านเว็ปไซต์ให้หน่วยงานอื่นสามารถนำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์ต่อไป

16. งบประมาณของโครงการวิจัย

1. ค่าตอบแทน			
1.1 ค่าตอบแทนผู้วิจัย	=	1,500	บาท
2. ค่าวัสดุ			
2.1 ค่าหนังสือ วารสารและตำรา	=	2,500	บาท
2.2 ค่ากระดาษ	=	1,000	บาท
2.3 ค่าถ่ายเอกสารและเข้าเล่ม	=	3,000	บาท
2.4 ค่าวัสดุสำนักงาน	=	1,000	บาท
3. ค่าใช้สอย			
3.1 ค่าลงทะเบียนเข้าร่วมประชุมวิชาการ	=	1,000	บาท
3.2 ค่าเช่าที่พักระหว่างเข้าร่วมประชุมวิชาการ	=	2,000	บาท
3.3 ค่าพาหนะเดินทางเข้าร่วมประชุมวิชาการ	=	2,000	บาท
4. ค่าสาธารณูปโภค	=	1,000	บาท
	รวมเงินทั้งสิ้น	15,000	บาท

หมายเหตุ ขอถัวเฉลี่ยจ่ายทุกรายการ

ภาคผนวก

Complete Residue Systems in Three Complex Quadratic Euclidean Domains

Santad Damkaew[1], Vichian Laohakosol [2] and Suton Tadee[3]

[1]Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science,
Prince of Songkla University, Songkhla 90110, Thailand

[2]Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand

[3]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Thepsatri Rajabhat University, Lopburi 15000, Thailand

email: [1]s.damkaew@hotmail.co.th , [2]fscivil@ku.ac.th and [3]s.tadee@hotmail.com

Abstract

In 1978, G.E. Bergum [1] discovered three explicit representations for complete residue systems in the Euclidean domain $\mathbb{Z}\left((-1+\sqrt{-3})/2\right)$ extending two similar earlier results for the Euclidean domains $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-1}\right)$ and $\mathbb{Z}\left(\sqrt{-2}\right)$. Among these three representations, the first is simplest to derive, while the third has a minimal property in the sense that the sum of their absolute values is minimal. Here, we derive analogous representations for complete residue systems in the remaining imaginary quadratic fields which are Euclidean domains, namely, $\mathbb{Z}\left((-1+\sqrt{-7})/2\right)$ and $\mathbb{Z}\left((-1+\sqrt{-11})/2\right)$. The first representation consists of lattice points in a rectangle in the first quadrant of the complex field. The second representation consists of lattice points in a parallelogram. The third representation consists of lattice points in a hexagon which enjoy a minimality condition.

2010 Mathematics Subject Classification: 12F05
Key words and phrases: complete residue systems, representations of complete residue systems

1 Introduction

We already know that for any rational integers a and b such that $b \neq 0$, there exist rational integers q and r such that $a = bq + r$ where $0 \leq r < |b|$. We called r is a residue. We see that r can be $0, 1, 2, \ldots, |b| - 1$. We say that $\{0, 1, 2, \ldots, |b| - 1\}$ is a complete residue system. In Euclidean domain, we can define divisibility and congruence. Let α and δ be elements and γ be a nonzero element of the Euclidean domain, we say that $\gamma | \alpha$ if and only if there exists a β in the Euclidean domain such that $\alpha = \gamma\beta$. Furthermore, $\alpha \equiv \delta(\mod \gamma)$ if and only if $\gamma | (\alpha - \delta)$. We interest a complete residue system for three complex quadratic Euclidean domains.

Let γ be a nonzero element of the Euclidean domain. Complete Residue Systems modulo γ is used to describe a residue of any number in Euclidean domain that divided by γ. We say that there are 2 important properties for any complete residue system modulo γ. First, there are no two distinct elements in a complete residue system modulo γ are congruent modulo γ. Second, every elements of the Euclidean domain are congruent to some element of the complete residue system modulo γ.

In this paper, we study about complete residue systems in three complex quadratic Euclidean Domain. We known that $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}$ is an algebraic integer where $m=-3,-7,-11$. Denote $\sigma_m=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}$ where $m=-3,-7,-11$. Then

$$\sigma_m^2=-\sigma_m-\frac{1}{4}+\frac{m}{4}. \tag{1.1}$$

We define

$$\mathbb{Z}(\sigma_m)=\{a+b\sigma_m:\ a,b\in\mathbb{Z}\}.$$

Let $\gamma=a+b\sigma_m\in\mathbb{Z}(\sigma_m)$. We define the norm of γ, denote by $|\gamma|^2$. Then

$$|\gamma|^2=a^2-ab+\left(\frac{1-m}{4}\right)b^2. \tag{1.2}$$

In 1976, G.E. Bergum [1] established the paper about representations of complete residue systems in $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$. So, we study about complete residue systems in $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ and $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$. In some representations, we prove in the normal form $\mathbb{Z}(\sigma_m)$.

2 Representation I

Lemma 2.1. *Let $\gamma=a+b\sigma_m\in\mathbb{Z}(\sigma_m)\setminus\{0\}$, $d=(a,b)$ and $\gamma=d(a_1+b_1\sigma_m)=d\mu$, where $(a_1,b_1)=1$. Then $d\,|\mu|^2$ is the smallest positive rational integer that γ divides.*

Proof. Let $c\in\mathbb{Z}^+$ and $\gamma|c$. Then there exists $\alpha=p+q\sigma_m\in\mathbb{Z}(\sigma_m)$ such that

$$c=\gamma\alpha=d(a_1+b_1\sigma_m)(p+q\sigma_m). \tag{2.1}$$

We consider 4 cases:

Case 1. $b_1=0$ and $q=0$. Since $(a_1,b_1)=1$ and (2.1), we have $a_1=\pm1$ and $c=\pm dp$. Therefore $|c|=d\,|p|\geq d(1)^2=d\,|\mu|^2$.

Case 2. $b_1=0$ and $q\neq0$. Since $(a_1,b_1)=1$ and (2.1), we have $a_1=\pm1$ and $c=\pm(dp+dq\sigma_m)$. Since $d\neq0$ and $q\neq0$, we have $c\notin\mathbb{Z}$. This is a contradiction.

Case 3. $b_1\neq0$ and $q=0$. From (2.1), we have $c=dpa_1+dpb_1\sigma_m$. Since $c\in\mathbb{Z}$, $d\neq0$ and $b_1\neq0$, we have $p=0$ and $c=0$. That is a contradiction.

Case 4. $b_1 \neq 0$ and $q \neq 0$. From (1.1) and (2.1), we have

$$c = d\left[a_1 p - \left(\frac{1-m}{4}\right) b_1 q\right] + d\left[a_1 q + b_1 p - b_1 q\right]\sigma_m. \tag{2.2}$$

Since $c \in \mathbb{Z}$ and $d \neq 0$, we have

$$a_1 q + b_1 p - b_1 q = 0 \tag{2.3}$$

or $a_1 q = b_1 (q-p)$. We have $b_1 | q$ because $(a_1, b_1) = 1$. Since $b_1 | q$ and $q \neq 0$, there exists $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ such that $q = b_1 l$. Since $q = b_1 l$, $b_1 \neq 0$ and (2.3), we have

$$p = l(b_1 - a_1). \tag{2.4}$$

From (2.2)-(2.4),we have

$$c = -ld\left[a_1^2 - a_1 b_2 + \left(\frac{1-m}{4}\right) b_1^2\right]. \tag{2.5}$$

Since $l \neq 0$, (2.5) and (1.2), we have

$$c = |-l|\, d\, |\mu|^2 \geq d\, |\mu|^2.$$

□

Theorem 2.2. *Let $\gamma = a + b\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$, $d = (a, b)$ and $\gamma = d(a_1 + b_1\sigma_m) = d\mu$, where $(a_1, b_1) = 1$. If d is even,*

$$T_1 = \left\{x + y\sqrt{m} : x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq d\,|\mu|^2 - 1,\ 0 \leq y \leq \frac{d-2}{2}\right\}$$

and

$$T_2 = \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m} : x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x \leq d\,|\mu|^2 - 1,\ 0 \leq y \leq \frac{d-2}{2}\right\},$$

then $T = T_1 \cup T_2$ is a complete residue system modulo γ.

Proof. Let $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ and $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (\mod \gamma)$. Then there exists $\delta = a_2 + b_2\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$ such that

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma\delta = d(a_1 + b_1\sigma_m)(a_2 + b_2\sigma_m). \tag{2.6}$$

From (1.1) and (2.6), we have

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{d}{2}\left[\left(2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + \left(\frac{1+m}{2}\right)b_1b_2\right) + \left(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2\right)\sqrt{m}\right]. \tag{2.7}$$

We consider 3 cases:

Case 1. Assume that $\alpha_1, \alpha_2 \in T_1$. Then

$$\alpha_i = x_i + y_i\sqrt{m}, \tag{2.8}$$

where $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ and $0 \le y_i \le \frac{d-2}{2}$ for all $i = 1, 2$. From (2.7)-(2.8), we have

(2.9)
$$(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{m} = \frac{d}{2}\left[\left(2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + \left(\frac{1+m}{2}\right)b_1b_2\right) + (a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2)\sqrt{m}\right].$$

Thus,

$$y_1 - y_2 = \frac{d}{2}(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2).$$

Since d is even, we have

$$\frac{d}{2}|(y_1 - y_2).$$

Since $0 \le y_i \le \frac{d-2}{2}$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-\left(\frac{d-2}{2}\right) \le y_1 - y_2 \le \frac{d-2}{2}.$$

Then

$$0 \le |y_1 - y_2| \le \frac{d-2}{2} < \frac{d}{2}.$$

Thus $y_1 = y_2$ and hence $x_1 \equiv x_2 \mod \gamma$. So that $\gamma|(x_1 - x_2)$. Since $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-(d\,|\mu|^2 - 1) \le x_1 - x_2 \le d\,|\mu|^2 - 1.$$

Thus,

$$0 \le |x_1 - x_2| \le d\,|\mu|^2 - 1 < d\,|\mu|^2.$$

By Lemma 2.1, $x_1 = x_2$. That is $\alpha_1 = \alpha_2$.

Case 2. Assume that $\alpha_1, \alpha_2 \in T_2$. Then

$$\alpha_i = \left(x_i + \frac{1}{2}\right) + \left(y_i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m} \tag{2.10}$$

where $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ and $0 \le y_i \le \frac{d-2}{2}$ for all $i = 1, 2$. From (2.7) and (2.10), we have (2.9). Similary case 1, we have $\alpha_1 = \alpha_2$.

Case 3. Assume that $\alpha_1 \in T_1$ and $\alpha_2 \in T_2$. Then

$$\alpha_1 = x_1 + y_1\sqrt{m} \text{ and } \alpha_2 = \left(x_2 + \frac{1}{2}\right) + \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}$$

where $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_i \leq d\,|\mu|^2 - 1$ and $0 \leq y_i \leq \frac{d-2}{2}$ for all $i = 1, 2$. From (2.7), we have

$$\begin{aligned}
&\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + \left(y_1 - y_2 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{m} \\
&= \frac{d}{2}\left[\left(2a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + \left(\frac{1+m}{2}\right)b_1b_2\right) + (a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2)\sqrt{m}\right].
\end{aligned}$$

Thus,

$$y_1 - y_2 - \frac{1}{2} = \frac{d}{2}\left(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2\right).$$

Since d is even, we have

$$\frac{d}{2}(a_1b_2 + a_2b_1 - b_1b_2) \in \mathbb{Z}$$

but $y_1 - y_2 - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. That is a contradiction. Case 3 is impossible. By 3 cases, no two distinct elements of T are congruent modulo γ.

Let $\alpha = x + y\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$. Since $d, y \in \mathbb{Z}$, there exist $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ such that

$$y = dq_1 + r_1, \tag{2.11}$$

where $0 \leq r_1 < d$. Since $d = (a, b)$, there exist $u, v \in \mathbb{Z}$ such that

$$au + bv = dq_1. \tag{2.12}$$

From (2.11)-(2.12), we have

$$y = au + bv + r_1. \tag{2.13}$$

We consider 2 cases:

Case 1. Assume that $r_1 = 2n_1$ where $n_1 \in \mathbb{Z}$. Then there exist $q_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ such that

$$x - n_1 - av - au + \left(\frac{1-m}{4}\right)bu = d\,|\mu|^2\,q_2 + n_2$$

where $0 \leq n_2 < d\,|\mu|^2$. Then

$$x = d\left|\mu\right|^2 q_2 + n_2 + n_1 + av + au - \left(\frac{1-m}{4}\right) bu. \tag{2.14}$$

From (2.13)-(2.14), we have

$$\begin{aligned}
\alpha &= x + y\sigma_m \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + n_2 + n_1 + av + au - \left(\frac{1-m}{4}\right) bu + (au + bv + r_1)\sigma_m \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + av + au + au\sigma_m + bv\sigma_m + ub\sigma_m + ub\left(-\sigma_m - \frac{1}{4} + \frac{m}{4}\right) + r_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{m}}{2}\right) + n_2 + n_1 \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + av + au + au\sigma_m + bv\sigma_m + ub\sigma_m^2 - \frac{2n_1}{2} + \frac{2n_1\sqrt{m}}{2} + n_2 + n_1 \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + (v + u + u\sigma_m)(a + b\sigma_m) + n_2 + n_1 \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + (v + u(1 + \sigma_m))\gamma + n_2 + n_1\sqrt{m}.
\end{aligned}$$

Since $d\left|\mu\right|^2 \equiv 0(\mod \gamma)$, we have

$$\alpha \equiv n_2 + n_1\sqrt{m}(\mod \gamma). \tag{2.15}$$

Since $0 \le n_2 < d\left|\mu\right|^2$, we have
and $0 \le r_1 = 2n_1 < d$, we have $0 \le n_2 \le d\left|\mu\right|^2 - 1$ and $0 \le n_1 \le \frac{d-2}{2}$. Thus, $n_2 + n_1\sqrt{m} \in T_1$. Then $\alpha \in T_1$.

Case 2. Assume that $r_1 = 2n_1 + 1$ where $n_1 \in \mathbb{Z}$. Then there exist $q_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ such that

$$x - n_1 - 1 - av - au + \left(\frac{1-m}{4}\right) bu = d\left|\mu\right|^2 q_2 + n_2$$

where $0 \le n_2 < d\left|\mu\right|^2$. Then

$$\begin{aligned}
\alpha &= x + y\sigma_m \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + n_2 + n_1 + 1 + av + au - \left(\frac{1-m}{4}\right) bu + (au + bv + r_1)\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{m}}{2}\right) \\
&= d\left|\mu\right|^2 q_2 + (v + u(1 + \sigma_m))\gamma + n_2 + \frac{1}{2} + \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}.
\end{aligned}$$

So that $\alpha \equiv \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}(\mod \gamma)$. Since $0 \le n_2 < d\left|\mu\right|^2$ and $0 \le r_1 < d$, we have $0 \le n_2 \le d\left|\mu\right|^2 - 1$ and $0 \le n_1 \le \frac{d-2}{2}$. Thus, $n_2 + n_1\sqrt{m} \in T_2$. Then $\alpha \in T_2$. By 2 cases, α is congruent to some element of T.

Since no two distinct elements of T are congruent modulo γ and every elements of $\mathbb{Z}(\sigma_m)$ are congruent to some elements of T, we have T is a complete residue system modulo γ. □

Theorem 2.3. *Let $\gamma = a + b\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$, $d = (a, b)$ and $\gamma = d(a_1 + b_1\sigma_m) = d\mu$. If d is odd,*

$$T_1 = \left\{ x + y\sqrt{m} : \ x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \le x \le d\,|\mu|^2 - 1,\ 0 \le y \le \frac{d-1}{2} \right\}$$

and

$$T_2 = \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m} : \ x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \le x \le d\,|\mu|^2 - 1,\ 0 \le y \le \frac{d-3}{2} \right\},$$

then $T = T_1 \cup T_2$ is a complete residue system modulo γ.

Proof. Let $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ and $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (\mod \gamma)$. Then there exists $\delta = a_2 + b_2\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$ such that $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma\delta$. Then

$$\alpha_1 - \alpha_2 = d(a_1 + b_1\sigma_m)(a_2 + b_2\sigma_m). \tag{2.16}$$

Case 1. Assume that $\alpha_1, \alpha_2 \in T_1$. Then

$$\alpha_i = x_i + y_i\sqrt{m}$$

where x_i, $y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ and $0 \le y_i \le \frac{d-1}{2}$ for all $i = 1, 2$. From (2.16), we have

$$(x_1 + y_1\sqrt{m}) - (x_2 + y_2\sqrt{m}) = d(a_1 + b_1\sigma_m)(a_2 + b_2\sigma_m).$$

Then

$$\begin{aligned} &2(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2)\sqrt{m} \\ &= d\left(\left(2a_1a_2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)b_1b_2 - a_1b_2 - b_1a_2\right) + (a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2)\sqrt{m}\right). \end{aligned}$$

Thus,

$$2(y_1 - y_2) = d(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2).$$

So that $d | 2(y_1 - y_2)$. Since $0 \le y_i \le \frac{d-1}{2}$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-(d-1) \le 2(y_1 - y_2) \le d - 1.$$

Then

$$0 \le |2(y_1 - y_2)| \le d - 1 < d.$$

Thus, $y_1 = y_2$ and hence $x_1 \equiv x_2 (\mod \gamma)$. So that $\gamma | (x_1 - x_2)$. Since $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-(d\,|\mu|^2 - 1) \le x_1 - x_2 \le d\,|\mu|^2 - 1.$$

Thus,

$$0 \le |x_1 - x_2| \le d\,|\mu|^2 - 1 < d\,|\mu|^2.$$

By Lemma 2.1, we have $x_1 = x_2$. Then $\alpha_1 = \alpha_2$.

Case 2. Assume that $\alpha_1, \alpha_2 \in T_2$. Then

$$\alpha_i = \left(x_i + \frac{1}{2}\right) + \left(y_i + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}$$

where $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ and $0 \le y_i \le \frac{d-3}{2}$ for all $i = 1, 2$. From (2.16), we have

$$\left(x_1 + \frac{1}{2} + \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{2} + \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}\right) = d(a_1 + b_1\sigma_m)(a_2 + b_2\sigma_m).$$

Then

$$\begin{aligned}
&2(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2)\sqrt{m} \\
&= d\left(\left(2a_1a_2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)b_1b_2 - a_1b_2 - b_1a_2\right) + (a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2)\sqrt{m}\right).
\end{aligned}$$

Thus,

$$2(y_1 - y_2) = d(a_1b_2 + b_1a_2 - b_1b_2).$$

So that $d|2(y_1 - y_2)$. Since $0 \le y_i \le \frac{d-3}{2}$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-(d-3) \le 2(y_1 - y_2) \le d - 3.$$

Then

$$0 \le |2(y_1 - y_2)| \le d - 3 < d.$$

Thus, $y_1 = y_2$ and hence $x_1 \equiv x_2 (\mod \gamma)$. So that $\gamma|(x_1 - x_2)$. Since $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$ for all $i = 1, 2$, we have

$$-(d\,|\mu|^2 - 1) \le x_1 - x_2 \le d\,|\mu|^2 - 1.$$

Thus,

$$0 \le |x_1 - x_2| \le d\,|\mu|^2 - 1 < d\,|\mu|^2.$$

By Lemma 2.1, we have $x_1 = x_2$. Then $\alpha_1 = \alpha_2$.

Case 3. Assume that $\alpha_1 \in T_1$ and $\alpha_2 \in T_2$. Then

$$\alpha_1 = x_1 + y_1\sqrt{m} \text{ and } \alpha_2 = (x_2 + \frac{1}{2}) + \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}$$

where $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le x_i \le d\,|\mu|^2 - 1$, for all $i = 1, 2$, $0 \le y_1 \le \frac{d-1}{2}$ and $0 \le y_2 \le \frac{d-3}{2}$. From (2.16), we have

$$(x_1 + y_1\sqrt{m}) - \left(x_2 + \frac{1}{2} + \left(y_2 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}\right) = d(a_1 + b_1\sigma_m)(a_2 + b_2\sigma_m).$$

Then

$$\begin{aligned}&(2x_1-2x_2-1)+(2y_1-2y_2-1)\sqrt{m}\\&=d\left(\left(2a_1a_2+\frac{m+1}{2}b_1b_2-a_1b_2-b_1a_2\right)+(a_1b_2+b_1a_2-b_1b_2)\sqrt{m}\right).\end{aligned}$$

Hence

$$2y_1-2y_2-1=d\,(a_1b_2+b_1a_2-b_1b_2)\,.$$

Since $0\le y_1\le\frac{d-1}{2}$ and $0\le y_2\le\frac{d-3}{2}$,

$$0\le|2y_1-2y_2-1|\le d-2<d.$$

Since $d|(2y_1-2y_2-1)$, we get $2y_1=2y_2+1$. That is a contradiction because $2y_1$ is even but $2y_2+1$ is odd. By 3 cases, no two distinct elements of T are congruent modulo γ.

Let $\alpha=x+y\sigma_m\in\mathbb{Z}(\sigma_m)$. There exist $q_1,r_1\in\mathbb{Z}$ such that $y=dq_1+r_1$ where $0\le r_1<d$. Since $d=(a,b)$, there exist $u,v\in\mathbb{Z}$ such that $au+bv=dq_1$. So that $y=au+bv+r_1$.

Case 1. Assume that $r_1=2n_1$ where $n_1\in\mathbb{Z}$. Then there exist $q_2,n_2\in\mathbb{Z}$ such that

$$x-n_1-av-au+\left(\frac{1-m}{4}\right)bu=d\,|\mu|^2\,q_2+n_2$$

where $0\le n_2<d\,|\mu|^2$. Then

$$\begin{aligned}\alpha&=x+y\sigma_m\\&=d\,|\mu|^2\,q_2+n_2+n_1+av+au-\left(\frac{1-m}{4}\right)bu+(au+bv+r_1)\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}\right)\\&=d\,|\mu|^2\,q_2+(v+u(1+\sigma_m))\gamma+n_2+n_1\sqrt{m}.\end{aligned}$$

So that $\alpha\equiv n_2+n_1\sqrt{m}(\mod\gamma)$. Since $0\le n_2<d\,|\mu|^2$ and $0\le r_1<d$, we have

$$0\le n_2\le d\,|\mu|^2-1\ \text{ and }\ 0\le n_1\le\frac{d-1}{2}.$$

Thus, $n_2+n_1\sqrt{m}\in\ T_1$. Then $\alpha\in T_1$.

Case 2. Assume that $r_1=2n_1+1$ where $n_1\in\mathbb{Z}$. Then there exist $q_2,n_2\in\mathbb{Z}$ such that

$$x-n_1-1-av-au+\left(\frac{1-m}{4}\right)bu=d\,|\mu|^2\,q_2+n_2$$

where $0\le n_2<d\,|\mu|^2$. Then

$$\begin{aligned}\alpha&=x+y\sigma_m\\&=d\,|\mu|^2\,q_2+n_2+n_1+1+av+au-\left(\frac{1-m}{4}\right)bu+(au+bv+r_1)\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{m}}{2}\right)\\&=d\,|\mu|^2\,q_2+(v+u(1+\sigma_m))\gamma+n_2+\frac{1}{2}+\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{m}.\end{aligned}$$

So that $\alpha \equiv \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{m}(mod\,\gamma)$. Since $0 \leq n_2 < d\,|\mu|^2$ and $0 \leq r_1 < d$, we have

$$0 \leq n_2 \leq d\,|\mu|^2 - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq n_1 \leq \frac{d-3}{2}.$$

Thus, $n_2 + n_1\sqrt{m} \in \; T_2$. Then $\alpha \in T_2$.

By 2 cases, α is congruent to some element of T. Since no two distinct element of T are congruent modulo γ and every element of $\mathbb{Z}(\sigma_m)$ are congruent to some elements of T, T is a complete residue system modulo γ. □

Lemma 2.4. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$. Then the cardinality of any representations of a complete residue system modulo γ are equal.*

Proof. Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$. Let R and S be representations of a complete residue system modulo γ. Let m and n are the cardinality of R and S respectively. By Pigeon's Hole Principle, we can show that it is contradict, if $m < n$ or $m > n$. Then, we see that the only one case that is possible is $m = n$. So, we conclude that the cardinality of any representations of a complete residue system modulo γ are equal. □

Corollary 2.5. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$. Then the cardinality of a complete residue system modulo γ is $|\gamma|^2$.*

Proof. By Lemma 2.4, the cardinality of any representations of a complete residue system modulo γ are equal. We can choose one representation to find the cardinality. Then we can conclude that the cardinality of other representations must be that value.

Let $\gamma = a + b\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$, $d = (a, b)$ and $\gamma = d(a_1 + b_1\sigma_m) = d\mu$. We consider 2 cases that is d is even and d is odd. If d is even, then we evaluate the cardinality from T in Theorem 2.2. So that

$$|T| = |T_1| + |T_2| = \frac{d}{2}(d\,|\mu|^2) + \frac{d}{2}(d\,|\mu|^2) = |d\mu|^2 = |\gamma|^2\,.$$

If d is odd, then we evaluate the cardinality from T in Theorem 2.3. So that

$$|T| = |T_1| + |T_2| = \frac{d+1}{2}(d\,|\mu|^2) + \frac{d-1}{2}(d\,|\mu|^2) = |d\mu|^2 = |\gamma|^2\,.$$

By 2 cases, we conclude that the cardinality of a complete residue system modulo γ is $|\gamma|^2$. □

3 Representation II

Theorem 3.1. *Let $\gamma = a + b\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$. Let V_1 be the collection of points inside the parallelogram $ABCD$ whose the vertice are*

$$\frac{\gamma}{2}(1 + \sigma_m), \;\; \frac{\gamma}{2}(1 - \sigma_m), \;\; \frac{\gamma}{2}(-1 - \sigma_m) \;\text{ and }\; \frac{\gamma}{2}(-1 + \sigma_m),$$

respectively, and let V_2 be the collection of the points on the half open line segment BC and CD. Then $V = V_1 \cup V_2$ is a complete residue system modulo γ.

Proof. Let $\alpha_1 = a_1 + b_1\sigma_m \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$. Then

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = \frac{a_1 + b_1\sigma_m}{a + b\sigma_m} = \frac{a_1a - a_1b + \frac{1-m}{4}b_1b}{|\gamma|^2} + \frac{b_1a - a_1b}{|\gamma|^2}\sigma_m.$$

Let

$$C_1 = \frac{a_1a - a_1b + \frac{1-m}{4}b_1b}{|\gamma|^2},\ D_1 = \frac{b_1a - a_1b}{|\gamma|^2},\ r_1 = \left\lfloor C_1 + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

$$s_1 = \left\lfloor D_1 + \frac{1}{2} \right\rfloor,\ R_1 = C_1 - r_1 \text{ and } S_1 = D_1 - s_1.$$

We can write $C_1 = c_1 + q_1$ where $c_1 \in \mathbb{Z}, q_1 \in \mathbb{Q}, 0 \leq q_1 < 1$. We consider 2 cases : $0 \leq q_1 < \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2} \leq q_1 < 1$. It can be shown that $-\frac{1}{2} \leq R_1 < \frac{1}{2}$. Similarly, $-\frac{1}{2} \leq S_1 < \frac{1}{2}$. We can write

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = (r_1 + s_1\sigma_m) + (R_1 + S_1\sigma_m).$$

Thus,

$$\alpha_1 \equiv (R_1 + S_1\sigma_m)\gamma \pmod{\gamma}.$$

Next, we consider the equations of the line segment AB, BC, CD and DA. The equations of the line segment AB, BC, CD and DA are

$$\gamma(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha - 1}{2}\sigma_m),\ \gamma(\frac{2\alpha - 1}{2} - \frac{1}{2}\sigma_m),\ \gamma(-\frac{1}{2} - \frac{2\alpha - 1}{2}\sigma_m) \text{ and } \gamma(-\frac{2\alpha - 1}{2} + \frac{1}{2}\sigma_m),$$

respectively, where $\alpha \in \mathbb{R}$ such that $0 \leq \alpha \leq 1$. If $-\frac{1}{2} < R_1 < \frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2} < S_1 < \frac{1}{2}$, then $(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma$ lies inside the parallelogram $ABCD$. Hence

$$(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma \in V_1.$$

If $R_1 = -\frac{1}{2}$, then $(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma$ lies on $\overline{CD}$. Hence

$$(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma \in V_2.$$

If $S_1 = -\frac{1}{2}$, then $(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma$ lies on $\overline{BC}$. Hence

$$(R_1 + S_1\sigma_m)\gamma \in V_2.$$

Therefore, every elements of $\mathbb{Z}(\sigma_m)$ are congruent to some elements of V.

Let $\alpha_1 \in V$. We can write

$$\alpha_1 = (C_1 + D_1\sigma_m)\gamma \in V$$

where $-\frac{1}{2} \leq C_1 < \frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2} \leq D_1 < \frac{1}{2}$. Since $-\frac{1}{2} \leq C_1 < \frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2} \leq R_1 < \frac{1}{2}$, we have $-1 < r_1 < 1$. Since $r_1 \in \mathbb{Z}$, we have $r_1 = 0$. Similarly, $s_1 = 0$.

Let $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ and $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{\gamma}$. Then there exists $\delta \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$ such that $\frac{\alpha_1}{\gamma} = \frac{\alpha_2}{\gamma} + \delta$.

$$\delta = (R_1 - R_2) + (S_1 - S_2)\sigma_m.$$

Consider the values of $R_1 - R_2$ and $S_1 - S_2$. Since $-\frac{1}{2} \leq R_1, R_2, S_1, S_2 < \frac{1}{2}$, $-1 < R_1 - R_2 < 1$ and $-1 < S_1 - S_2 < 1$. Since $\delta \in \mathbb{Z}(\sigma_m)$, $\delta = 0$ and hence $\alpha_1 = \alpha_2$. Thus, no two distinct elements of V are congruent modulo γ. Since, no two distinct elements of V are congruent modulo γ and every elements of $\mathbb{Z}(\sigma_m)$ are congruent to some elements of V, V is a complete residue system modulo γ. □

Theorem 3.2. *Keeping notation as Theorem 3.1. Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$. Then $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide $|\gamma|^2$.*

Proof. Let $\gamma = a + b\sigma_{-7} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$. Suppose that $V_2 = \phi$. Assume that $2 \mid |\gamma|^2$. So that

$$|\gamma|^2 = a^2 - ab + 2b^2 = a(a-b) + 2b^2$$

is even. Thus, a is even or a and b have a same parity. We consider 3 cases. Case 1. a and b are even, Case 2. a and b are odd and Case 3. a is even and b is odd. In Case 1. and Case 3., Vertex C is a point of V_2. In Case 2., there exists a vertex on the line segment BC. By 3 cases, $V_2 \neq \phi$.

Conversely, let 2 not divide $|\gamma|^2$. Assume that $V_2 \neq \phi$. Let $\alpha_1 = a_1 + b_1\sigma_{-7} \in V_2$. Thus α_1 lies on $\overline{BC}$ or $\overline{CD}$.
If α_1 lies on $\overline{CD}$, then

$$\frac{a_1 a - a_1 b + 2b_1 b}{|\gamma|^2} = -\frac{1}{2}.$$

So that $2 \mid |\gamma|^2$. That is a contradiction.
If α_1 lies on $\overline{BC}$, then

$$\frac{b_1 a - a_1 b}{|\gamma|^2} = -\frac{1}{2}.$$

So that $2 \mid |\gamma|^2$. That is a contradiction. □

Lemma 3.3. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. Then $2 \mid |\gamma|^2$ if and only if $2 \mid \gamma$.*

Proof. Let $\gamma = a + b\sigma_{-11} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. Then

$$|\gamma|^2 = a^2 - ab + 3b^2 = (a-b)^2 + ab + 2b^2.$$

Suppose that $2 \mid |\gamma|^2$. Then $a - b$ amd ab have a same parity. If $a - b$ is odd and ab is odd, then a and b have opposite parity. So that ab is even. That is contradict. If $a - b$ is even, then a and b have a same parity. Since ab is even, a and b are even. Then there exist $c, d \in \mathbb{Z}$ such that $a = 2c$ and $b = 2d$. Thus,

$$\gamma = 2c + 2d\sigma_{-11} = 2(c + d\sigma_{-11}).$$

Therefore $2 \mid \gamma$.

Conversely, let $2 \mid \gamma$. Then there exists $c + d\sigma_{-11} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ such that $\gamma = 2(c + d\sigma_{-11})$. Thus $|\gamma|^2 = 2(2c^2 - 2cd + 6d^2)$. Therefore, $2 \mid |\gamma|^2$. □

Theorem 3.4. *Keeping notation as Theorem 3.1. Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. Then $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide γ.*

Proof. Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. Suppose that $V_2 = \phi$. Assume that $2|\gamma$. There exist $\delta \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ such that $\gamma = 2\delta$. Thus, the point C is

$$\frac{\gamma}{2}(-1 - \sigma_{-11}) = \delta(-1 - \sigma_{-11}).$$

So that $V_2 \neq \phi$. That is contradict. Hence, if $V_2 = \phi$ then 2 is not divide γ.

Conversely, let 2 not divide γ. Assume that $V_2 \neq \phi$. Let $\alpha_1 \in V_2$. Then α_1 lies on $\overline{BC}$ or $\overline{CD}$.
If α_1 lies on $\overline{CD}$, then

$$\frac{a_1 a - a_1 b + 2b_1 b}{|\gamma|^2} = -\frac{1}{2}.$$

So that $2|\,|\gamma|^2$. By Lemma 3.3, $2|\gamma$. That is a contradiction.
If α_1 lies on $\overline{BC}$, then

$$\frac{b_1 a - a_1 b}{|\gamma|^2} = -\frac{1}{2}.$$

So that $2|\,|\gamma|^2$. By Lemma 3.3, $2|\gamma$. That is a contradiction. $\square$

By Theorem 3.2, Lemma 3.3 and Theorem 3.4, we see that $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide $|\gamma|^2$ when γ is an element of $\mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$ or $\mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. In 1976, Bergum had been study complete residue systems in the complex quadratic Euclidean domain $\mathbb{Z}(\omega)$ where $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. And his result in page 79, if $\gamma = a + b\omega$ then $2|\,|\gamma|^2$ if and only if $2|\gamma$ and $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide γ. In this paper, $\mathbb{Z}(\omega)$ is $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$ we can say that if $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$ and $V = V_1 \cup V_2$, then $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide $|\gamma|^2$. $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$ and $V = V_1 \cup V_2$, then $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide γ. So we can conclude in three complex quadratic Euclidean domains. The result is the following theorem.

Theorem 3.5. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_m) \setminus \{0\}$ when $m = -3, -7, -11$. Then $V_2 = \phi$ if and only if 2 is not divide $|\gamma|^2$.*

4 Representation III

Theorem 4.1. *Let $\gamma = a + b\sigma_{-7} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$. Let W_1 be the collection of points inside the hexagon $ABCDEF$ whose vertices are respectively*

$$\frac{\gamma}{7}(5 + 3\sigma_{-7}),\ \frac{\gamma}{7}(2 + 4\sigma_{-7}),\ \frac{\gamma}{7}(-2 + 3\sigma_{-7}),$$

$$\frac{\gamma}{7}(-5 - 3\sigma_{-7}),\ \frac{\gamma}{7}(-2 - 4\sigma_{-7}),\ \text{and}\ \frac{\gamma}{7}(2 - 3\sigma_{-7})$$

and let W_2 be the collection on the line segment CD, DE and EF except the vertex F. Then $W = W_1 \cup W_2$ is a complete residue system modulo γ.

Proof. Let $\alpha_1 = a_1 + b_1\sigma_{-7} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})$. In the previous representation, it was shown that there exist integers r_1 and s_1 together with rationals R_1 and S_1 such that

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = (r_1 + s_1\sigma_{-7}) + (R_1 + S_1\sigma_{-7})$$

where $-1 \leq 2R_1 < 1$ and $-1 \leq 2S_1 < 1$. We consider 2 cases for R_1 that is $-1 \leq 2R_1 \leq 0$ and $0 < 2R_1 < 1$ with 2 cases for S_1 that is $-1 \leq 2S_1 \leq 0$ and $0 < 2S_1 < 1$. By consider 4 cases, we conclude that there exist integers r and s together with rationals R and S such that

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = (r + s\sigma_{-7}) + (R + S\sigma_{-7})$$

where $-2 \leq R+3S < 2$, $-1 \leq 2R - S < 1$ and $-2 \leq 4S - R < 2$. We can find the equations of the line segments for the sides of the hexagon.
If $-2 < R+3S < 2$, $-1 < 2R - S < 1$ and $-2 < 4S - R < 2$, then

$$(R + S\sigma_{-7})\gamma \in W_1.$$

If $2R - S = -1$, then $(R + S\sigma_{-7})\gamma$ lies on the line segment CD. So that

$$(R + S\sigma_{-7})\gamma \in W_2.$$

If $R + 3S = -2$, then $(R + S\sigma_{-7})\gamma$ lies on the line segment DE. So that

$$(R + S\sigma_{-7})\gamma \in W_2.$$

If $4S - R = -2$, then $(R + S\sigma_{-7})\gamma$ lies on the line segment EF. So that

$$(R + S\sigma_{-7})\gamma \in W_2.$$

Therefore every element of $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ are congruent with some element in W.
Let $\alpha_1 = (C + D\sigma_{-7})\gamma = (r + s\sigma_{-7})\gamma + (R + S\sigma_{-7})\gamma \in W$. Then $-1 \leq 2C - D < 1$, $-2 \leq C + 3D < 2$ and $-2 \leq 4D - C < 2$. Then we can show that r and s satisfy equations

$$\begin{aligned} 2r - s &= -1, 0, 1, \\ r + 3s &= -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \\ \text{and } \ 4s - r &= -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Next, we consider 147 cases, so we can evaluate the value of integers r and s. The only one case that satisfies with $r, s \in \mathbb{Z}$ is $r + 3s = 0$, $2r - s = 0$ and $4s - r = 0$. Then, the solution must be $r = 0$ and $s = 0$ only. Then we can write $\alpha_1 = (R + S\sigma_{-7})\gamma$.

Let $\alpha_1, \alpha_2 \in W$. Then we can write $\alpha_1 = (R + S\sigma_{-7})\gamma$ and $\alpha_2 = (U + V\sigma_{-7})\gamma$ where

$$\begin{aligned} &-2 \leq R + 3S < 2, \ \ -1 \leq 2R - S < 1, \ \ -2 \leq 4S - R < 2, \\ &-2 \leq U + 3V < 2, \ \ -1 \leq 2U - V < 1 \ \text{ and } \ -2 \leq 4V - U < 2. \end{aligned}$$

Let $\alpha_1 \equiv \alpha_2(\mod \gamma)$. Then there exists $\delta \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ such that $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma\delta$. We can write

$$\delta = (R - U) + (S - V)\sigma_{-7}.$$

So, we can find the possible values of $R - U$ and $S - V$, that is $R - U = -1, 0, 1$ and $S - V = -1, 0, 1$. But, $R - U = 0$ and $S - V = 0$ are satisfy $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})$. Thus $\alpha_1 = \alpha_2$.

Therefore, there are no two distinct elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ are congruent modulo γ. Since there are no two distinct elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ are congruent modulo γ and every elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ are congruent to some elements of W, W is a complete residue system modulo γ. □

Theorem 4.2. *Let $\gamma = a + b\sigma_{-11} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$. Let W_1 be the collection of points inside the hexagon $ABCDEF$ whose vertices are respectively*

$$\frac{\gamma}{11}(8 + 5\sigma_{-11}),\ \frac{\gamma}{11}(3 + 6\sigma_{-11}),\ \frac{\gamma}{11}(-3 + 5\sigma_{-11}),$$

$$\frac{\gamma}{11}(-8 - 5\sigma_{-11}),\ \frac{\gamma}{11}(-3 - 6\sigma_{-11}) \text{ and } \frac{\gamma}{11}(3 - 5\sigma_{-11})$$

and let W_2 be the collection on the line segment CD, DE and EF except the vertex F. Then $W = W_1 \cup W_2$ is a complete residue system modulo γ.

Proof. Let $\alpha_1 = a_1 + b_1\sigma_{-11} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$. In the previous representation, it was shown that there exist integers r_1 and s_1 together with rationals R_1 and S_1 such that

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = (r_1 + s_1\sigma_{-11}) + (R_1 + S_1\sigma_{-11})$$

where $-1 \leq 2R_1 < 1$ and $-1 \leq 2S_1 < 1$. We consider 2 cases for R_1 that is $-1 \leq 2R_1 \leq 0$ and $0 < 2R_1 < 1$ with 2 cases for S_1 that is $-1 \leq 2S_1 \leq 0$ and $0 < 2S_1 < 1$. By consider 4 cases, we conclude that there exist integers r and s together with rationals R and S such that

$$\frac{\alpha_1}{\gamma} = (r + s\sigma_{-11}) + (R + S\sigma_{-11})$$

where $-3 \leq R + 5S < 3$, $-1 \leq 2R - S < 1$ and $-3 \leq 6S - R < 3$. We can find the equations of the line segments for the sides of the hexagon.
If $-3 < R + 5S < 3$, $-1 < 2R - S < 1$ and $-3 < 6S - R < 3$, then

$$(R + S\sigma_{-11})\gamma \in W_1.$$

If $2R - S = -1$, then $(R + S\sigma_{-11})\gamma$ lies on the line segment CD. So that

$$(R + S\sigma_{-11})\gamma \in W_2.$$

If $R + 5S = -3$, then $(R + S\sigma_{-11})\gamma$ lies on the line segment DE. So that

$$(R + S\sigma_{-11})\gamma \in W_2.$$

If $6S - R = -3$, then $(R + S\sigma_{-11})\gamma$ lies on the line segment EF. So that

$$(R + S\sigma_{-11})\gamma \in W_2.$$

Therefore every element of $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ are congruent with some element in W.

Let $\alpha_1 = (C + D\sigma_{-11})\gamma = (r + s\sigma_{-11})\gamma + (R + S\sigma_{-11})\gamma \in W$. Then $-1 \leq 2C - D < 1$, $-3 \leq C + 5D < 3$ and $-3 \leq 6D - C < 3$. Then we can show that r and s satisfy equations

$$\begin{aligned} 2r - s &= -1, 0, 1, \\ r + 5s &= -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ \text{and } \ 6s - r &= -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Next, we consider 363 cases, so we can evaluate the value of integers r and s. The only one case that satisfies with $r, s \in \mathbb{Z}$ is $r + 5s = 0$, $2r - s = 0$ and $6s - r = 0$. Then we can write $\alpha_1 = (R + S\sigma_{-11})\gamma$.

Let $\alpha_1, \alpha_2 \in W$. Then we can write $\alpha_1 = (R + S\sigma_{-11})\gamma$ and $\alpha_2 = (U + V\sigma_{-11})\gamma$ where

$$\begin{aligned} &-3 \leq R + 5S < 3, \quad -1 \leq 2R - S < 1, \quad -3 \leq 6S - R < 3, \\ &-3 \leq U + 5V < 3, \quad -1 \leq 2U - V < 1 \ \text{ and } \ -3 \leq 6V - U < 3. \end{aligned}$$

Let $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (\mod \gamma)$. Then there exists $\delta \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ such that $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma\delta$. We can write

$$\delta = (R - U) + (S - V)\sigma_{-11}.$$

So, we can find the possible values of $R - U$ and $S - V$, that is $R - U = -1, 0, 1$ and $S - V = -1, 0, 1$. But, $R - U = 0$ and $S - V = 0$ are satisfy $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$. Thus, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Therefore, there are no two distinct elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ are congruent modulo γ. Since there are no two distinct elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ are congruent modulo γ and every elements of $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ are congruent to some elements of W, W is a complete residue system modulo γ. □

Definition 4.3. *A representation S of a complete residue system modulo γ is said to be an absolute minimal representation iff for any representation R of a complete residue system modulo γ, we have*

$$\sum_{\alpha \in S} |\alpha| \leq \sum_{\beta \in R} |\beta| .$$

In this section we interest an absolute minimal representation for a complete residue system modulo γ in $\mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ and $\mathbb{Z}(\sigma_{-11})$. In 1976, G.E.Bergum had been established about an absolute minimal representation modulo γ in $\mathbb{Z}(\sigma_{-3})$. Now, there are 2 complex quadratic Euclidean domains that we must find an absolute minimal representation for a complete residue system modulo γ.

Lemma 4.4. *If $-1 \leq k \leq 1$ and n is a rational integer, then $n^2 + kn \geq 0$.*

Proof. The proof of Lemma 4.4 is straight forward. Consider an interval that makes $n^2+kn<0$. So we can see there is no a rational integer n such that $n^2+kn<0$. We can conclude that $n^2+kn \geq 0$. □

Theorem 4.5. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7}) \setminus \{0\}$ and $\alpha \in W$ where W is the set describe in Theorem 4.1. Let $\beta \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ such that $\beta \equiv \alpha(\mod \gamma)$. Then $|\beta| \geq |\alpha|$.*

Proof. Let $\alpha = (R+S\sigma_{-7})\gamma$ be in the standard form. Since $\beta \equiv \alpha(mod\gamma)$, there exists $c+d\sigma_{-7} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})$ such that $\beta - \alpha = \gamma(c+d\sigma_{-7})$. Therefore, $\beta = (c+d\sigma_{-7}) + (R+S\sigma_{-7})\gamma$. Hence

$$\begin{aligned}\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|^2 &= (R+c)^2 - (R+c)(S+d) + 2(S+d)^2 \\ &= (R^2 - RS + 2S^2) + (2cR + c^2 - Rd - cS - cd + 4Sd + 2d^2) \\ &= E + \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|^2.\end{aligned}$$

where $E = 2cR + c^2 - Rd - cS - cd + 4Sd + 2d^2$. We consider 7 cases.

Case 1 $c = d$. Then $E = 2(d^2 + d(\frac{R+3S}{2}))$. By Lemma 4.4, we have $E > 0$.

Case 2 $c < d$ and $c < 0$. Since $-1 \leq 2R - S < 1$ and $-d < -c$, we have

$$2R - S - d < -d + 1 \leq -c.$$

Then

$$c^2 + (2R - S - d)c > 0.$$

By Lemma 4.4, we have

$$E = c^2 + (2R - S - d)c + 2(d^2 + d(\frac{4S-R}{2})) \geq 0.$$

Case 3 $c < d$ and $c = 0$. Thus, $E = 2(d^2 + d(\frac{4S-R}{2}))$. By Lemma 4.4, we have $E \geq 0$.

Case 4 $c < d$ and $c > 0$. Since $-1 \leq \frac{4S-R}{2} < 1$ and $c < d$, we have

$$c \geq d - 1 \geq \frac{4S-R}{2} + d.$$

Then

$$d(4S - R + 2d) - 2cd \geq 0.$$

Since $0 < c < d$, we get $cd > 0$. By Lemma 4.4, we have

$$E = d(4S - R + 2d) - 2cd + cd + (c^2 + (2R - S)c) \geq 0.$$

Case 5 $c > d$ and $c < 0$. Since $-1 \leq \frac{4S-R}{2} < 1$ and $c > d$, we get

$$\frac{4S-R}{2} + d < d + 1 \leq c.$$

Then

$$d(4S - R + 2d) - 2cd \geq 0.$$

Since $d < c < 0$, we have $cd > 0$. By Lemma 4.4, we have

$$E = d(4S - R + 2d) - 2cd + cd + (c^2 + (2R - S)c) > 0.$$

Case 6 $c > d$ and $c = 0$. Then

$$E = 2(d^2 + d(\frac{4S-R}{2})).$$

By Lemma 4.4, we have $E \geq 0$.

Case 7 $c > d$ and $c > 0$. Since $-1 \leq 2R - S < 1$ and $c > d$, we have

$$d \leq c - 1 \leq 2R - S - d.$$

Then

$$c^2 + (2R - S - d)c \leq 0.$$

By Lemma 4.4, we have

$$E = c^2 + (2R - S - d)c + 2(d^2 + d(\frac{4S-R}{2})) \geq 0.$$

By 7 cases, we have $E \geq 0$. Therefore, $|\beta| \geq |\alpha|$. □

Theorem 4.6. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$ and $\alpha \in W$ where W is the set describe in Theorem 4.2. Let $\beta \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ such that $\beta \equiv \alpha(\mod \gamma)$. Then $|\beta| \geq |\alpha|$.*

Proof. Let $\alpha = (R + S\sigma_{-11})\gamma$ be in the standard form. Since $\beta \equiv \alpha(\mod \gamma)$, there exists $c+d\sigma_{-11} \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11})$ such that $\beta - \alpha = \gamma(c+d\sigma_{-11})$. Therefore, $\beta = (c+d\sigma_{-11}) + (R+S\sigma_{-11})\gamma$. Hence

$$\begin{aligned}\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|^2 &= (R+c)^2 - (R+c)(S+d) + 3(S+d)^2 \\ &= (R^2 - RS + 3S^2) + (2cR + c^2 - Rd - cS - cd + 6Sd + 3d^2) \\ &= E + \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|^2.\end{aligned}$$

where $E = 2cR + c^2 - Rd - cS - cd + 4Sd + 2d^2$. We consider 7 cases.

Case 1 $c = d$. Then $E = 3(d^2 + d(\frac{R+5S}{3}))$. By Lemma 4.4, we have $E > 0$.

Case 2 $c < d$ and $c < 0$. Since $-1 \leq 2R - S < 1$ and $-d < -c$, we have

$$2R - S - d < -d + 1 \leq -c.$$

Thus, $c^2 + (2R - S - d)c > 0$. By Lemma 4.4, we have

$$E = c^2 + (2R - S - d)c + 3(d^2 + d(\frac{6S - R}{3})) \geq 0.$$

Case 3 $c < d$ and $c = 0$. Then $E = 3\left(d^2 + d\left(\frac{6S-R}{2}\right)\right)$. By Lemma 4.4, we have $E \geq 0$.

Case 4 $c < d$ and $c > 0$. Since $-1 \leq \frac{6S-R}{3} < 1$ and $c < d$, we have

$$c \geq d - 1 \geq \frac{6S - R}{3} + d.$$

Thus,

$$d(6S - R + 3d) - 3cd \geq 0.$$

Since $0 < c < d$, we have $2cd > 0$. By Lemma 4.4, we have

$$E = d(6S - R + 3d) - 3cd + 2cd + (c^2 + (2R - S)c) \geq 0.$$

Case 5 $c > d$ and $c < 0$. Since $-1 \leq \frac{6S-R}{3} < 1$ and $c > d$, we have

$$\frac{6S - R}{3} + d < d + 1 \leq c.$$

Thus, $d(6S - R + 3d) - 3cd \geq 0$. Since $d < c < 0$, we have $2cd > 0$. By Lemma 4.4, we have

$$E = d(6S - R + 3d) - 3cd + 2cd + (c^2 + (2R - S)c) > 0.$$

Case 6 $c > d$ and $c = 0$. Thus $E = 3(d^2 + d(\frac{6S-R}{3}))$. By Lemma 4.4, we have $E \geq 0$.

Case 7 $c > d$ and $c > 0$. Since $-1 \leq 2R - S < 1$ and $c > d$, we have

$$d \leq c - 1 \leq 2R - S - d.$$

Then

$$c^2 + (2R - S - d)c \leq 0.$$

By Lemma 4.4, we have

$$E = c^2 + (2R - S - d)c + 3(d^2 + d(\frac{6S - R}{3})) \geq 0.$$

By 7 cases, we have $E \geq 0$. Therefore, $|\beta| \geq |\alpha|$. $\square$

Corollary 4.7. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-7})\setminus\{0\}$, then W describe in Theorem 4.1 is an absolute minimal representation of a complete residue system modulo γ.*

Proof. Let R be a representation of a complete residue system modulo γ. Let $\alpha \in W$ and $\beta \in R$ such that $\beta \equiv \alpha (\mod \gamma)$. By Lemma 2.4, Corollary 2.5 and Theorem 4.5, we conclude that

$$\sum_{\alpha \in W} |\alpha| \leq \sum_{\beta \in R} |\beta|.$$

Thus, W is an absolute minimal representation of a complete residue system modulo γ. □

Corollary 4.8. *Let $\gamma \in \mathbb{Z}(\sigma_{-11}) \setminus \{0\}$, then W describe in Theorem 4.2 is an absolute minimal representation of a complete residue system modulo γ.*

Proof. Let R be a representation of a complete residue system modulo γ. Let $\alpha \in W$ and $\beta \in R$ such that $\beta \equiv \alpha (\mod \gamma)$. By Lemma 2.4, Corollary 2.5 and Theorem 4.6, we conclude that

$$\sum_{\alpha \in W} |\alpha| \leq \sum_{\beta \in R} |\beta|.$$

Thus, W is an absolute minimal representation of a complete residue system modulo γ. □

References

[1] G. E. Bergum. Complete Residue Systems in the Quadratic Domain $\mathbb{Z}(e^{\frac{2\Pi i}{3}})$, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **1** (1978), 75–86.

[2] N. R. Hardman and J. H. Jordan, A minimum problem connected with complete residue systems in the Gaussian integers, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 559–561.

[3] J. H. Jordan and C. J. Potratz, Complete residue systems in the Gaussian integers, Math. Magazine 38 (1965), 1–12.

[4] C. J. Potratz, Character sums in $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})/(p)$, Ph.D. dissertation, Washington State University, 1966.

[5] D. Redmond, *Number Theory, An Introduction*, Marcel Deker, 1996.

ประกาศนียบัตรฉบับนี้ให้ไว้เพื่อแสดงว่า

สุธิน ตาดี

ได้เข้าร่วมการประชุมวิชาการ

ทฤษฎีจำนวนและการประยุกต์ ครั้งที่ ๖

ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วันที่ ๑๗ - ๑๘ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๘

ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล
ที่ปรึกษาฯ

ดร.สุริยา ณ หนองคาย
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขอมอบเกียรติบัตรเพื่อแสดงว่า

สุธน ตาดี

ได้เข้าร่วม

การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ประจำปี 2559 ครั้งที่ 21 (AMM 2016)

การประชุมวิชาการคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และประยุกต์ประจำปี 2559 (APAM 2016)

ณ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระหว่างวันที่ 23 – 25 พฤษภาคม 2559

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)
ประธานคณะกรรมการจัดการประชุม

(ศาสตราจารย์ ดร.ชิดชนก เหลือสินทรัพย์)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

27 เมษายน 2559

เรื่อง ขออนุญาตให้บุคลากรทำงานวิจัย

เรียน กรรมการและผู้ช่วยเลขานุการคณะกรรมการจัดการศึกษานอกที่ตั้ง อำเภอชัยบาดาล

ตามที่ อาจารย์สุธน ตาดี อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี หน่วยจัดการศึกษานอกที่ตั้งมหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี อำเภอชัยบาดาล อยู่ในระหว่างทำงานวิจัยร่วมกับ ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในงานวิจัยเรื่อง Complete Residue Systems in Three Complex Quadratic Euclidean Domains

ขณะนี้งานวิจัยเรื่องดังกล่าวยังคงเหลือส่วนที่ต้องดำเนินการประมาณ 30 % เพื่อให้ได้งานวิจัยที่เสร็จสมบูรณ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ จึงใคร่ขอเชิญอาจารย์สุธน ตาดี เข้าร่วมทำวิจัยในระหว่างวันที่ 30 พฤษภาคม - 3 มิถุนายน 2559

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

10 มิถุนายน 2559

เรื่อง ขออนุญาตให้บุคลากรเข้าร่วมทำงานวิจัย

เรียน คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ตามที่ อาจารย์สุธน ตาดี อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเทพสตรี อยู่ในระหว่างทำงานวิจัยร่วมกับศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในงานวิจัยเรื่อง Number systems in some fields

ขณะนี้งานวิจัยเรื่องดังกล่าวอยู่ในขั้นตอนดำเนินการตามแผนงานวิจัย ดังนั้นเพื่อให้ได้งานวิจัยที่เสร็จสมบูรณ์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ จึงใคร่ขอเชิญอาจารย์สุธน ตาดี เข้าร่วมทำวิจัยในระหว่างวันที่ 4 – 8 กรกฎาคม 2559

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา

ขอแสดงความนับถือ

(ศาสตราจารย์ ดร.วิเชียร เลาหโกศล)